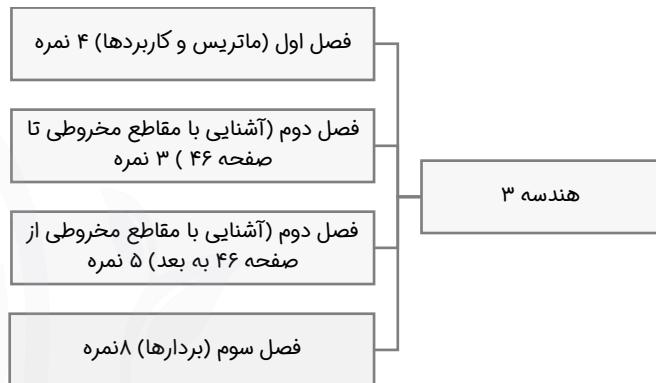


سلام به همه مازی های عزیز

امسال امتحان نهایی شما به خاطر بحث تأثیر معدل توی کنکور اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده و عقل سلیم حکم می‌کنه که امتحان نهایی رو به شدت جدی بگیرین. قبل از هر چیز لازمه که بدونیم توی نوبت خرداد ماه و برای درس هندسه ۳، بارم‌بندی به چه صورتی هست، ببینید:



همون طور که می‌بینید، ارزش نمره‌ای فصل سوم از بقیه فصل‌ها بیش‌تره ولی بهتون توصیه می‌شه که همه فصل‌های کتاب رو جدی بگیرین تا بتونین بهترین نتیجه ممکن رو کسب کنید.

حالا بریم که یه ذره ریزتر فصل‌های کتاب و سؤال‌هایی که احتمال مطرح شدن اونا زیاده رو بررسی کنیم. فقط قبل از ورود به این قسمت لازمه که این نکته مهم رو بهتون بگم که سعی کنید روی مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و از همه مهم‌تر روی تمرین‌های کتاب به شدت مسلط بشید چرا که سوابق امتحان نهایی توی سال‌های گذشته ثابت کرده که این قسمت‌ها می‌تونن منبع اصلی طرح سؤال‌های امتحانی باشن (گاهاً سؤال‌های این قسمت‌ها حتی بدون تغییر عدد توی امتحان اومدن).

**فصل اول (ماتریس و کاربردها):**

- ۱) ماتریس‌های خاص (ماتریس قطری، ماتریس هم‌مانی و ...) و ویژگی‌های آن‌ها را بلد باشید.
- ۲) ممکن است رابطه یک ماتریس را به صورت ضابطه‌ای و برحسب  $I$  و  $J$  به ما بدهند و از ما بخواهند که درایه‌های آن را مشخص کنیم.
- ۳) نوع دیگری از سؤال که می‌تواند مطرح شود به این صورت است که از ما بخواهند که یکی از ویژگی‌های ماتریس را اثبات کنیم.
- ۴) مدل دیگری از سؤالات مربوط به تساوی ماتریس‌هاست به این صورت که دو ماتریس را به ما می‌دهند و به ما می‌گویند که این دو ماتریس باهم برابرند و از ما می‌خواهند که مقادیر مجهول را به دست بیاوریم.
- ۵) تیپ دیگری که احتمال مطرح شدن آن زیاد است، سؤالی درباره جمع، تفریق و یا ضرب دو ماتریس است.
- ۶) به دست آوردن دترمینان ماتریس هم یکی دیگر از پر تکرارترین سؤالات امتحان نهایی است.

۷) حل دستگاه دو معادله و دو مجهول هم تقریباً هر سال پای ثابت سؤالات است که شامل دو تیپ سؤال می‌شود، تیپ اول به این صورت است که دستگاه دو معادله و دو مجهول را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که مقادیر مجهول  $X$  و  $Y$  را به دست آوریم و تیپ دوم هم به این صورت است که از ما می‌خواهند که مقدار مجهول (مثلاً  $m$ ) را طوری به دست بیاوریم که دستگاه جواب نداشته باشد یا این که دستگاه جواب منحصر به فرد داشته باشد و ...

**فصل دوم (آشنایی با مقاطع مخروطی):**

- ۱) در رابطه با سطح مقطع ناشی از برخورد یک صفحه با رویه مخروطی، می‌تواند سؤالات جای خالی و یا درست - نادرست مطرح شود.
- ۲) قسمت مکان هندسی و اشتراک مکان هندسی‌ها هم از مهم‌ترین بخش‌های درس اول است که احتمال طرح سؤال از آن زیاد است.
- ۳) از درس دایره چند مدل سؤال را می‌توان مطرح کرد:

- شرط دایره بودن یک معادله
- اطلاعاتی از یک دایره را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که معادله آن دایره را بنویسیم.
- وضعیت نسبی خط و دایره
- وضعیت نسبی نقطه و دایره
- وضعیت نسبی دو دایره

۴) در رابطه با بیضی نیز مدل‌های طرح سؤالی می‌تواند به صورت زیر باشد:

- اطلاعاتی درباره بیضی به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که پارامترهای مختلف آن را به دست بیاوریم.
- مسائل اثباتی بیضی که به طور مفصل در درسنامه درباره آن‌ها بحث کردیم و سؤال‌های مهم آن‌ها را براتون حل کردیم.

۵) از درس سهمی هم سؤال خیزترین موارد عبارتند از:

- معادله یک سهمی را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که مواردی مانند کانون سهمی، رأس سهمی، معادله خط هادی و ... را به دست بیاوریم.
- خاصیت بازتابندگی سهمی
- اطلاعاتی درباره سهمی به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که معادله آن را بنویسیم در این نوع از سؤالات، برای نوشتن معادله سهمی ابتدا باید تشخیص دهیم که سهمی از چه نوعی است (افقی یا قائم) و سپس معادله آن را تشکیل دهیم.

**فصل سوم (بردارها):**

۱) اطلاعاتی درباره یک نقطه در فضا را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که مختصات آن نقطه را به دست بیاوریم. (و یا این که آن نقطه در کدام ناحیه قرار دارد)

۲) مختصات دو نقطه را در فضا به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که مواردی مانند طول پاره خط، مختصات وسط پاره خط و ... را به دست بیاوریم.

۳) شکل را به ما می‌دهند (معمولاً مکعب مستطیل) و از ما می‌خواهند که مختصات یک رأس خاص و یا یک یال خاص را به دست بیاوریم.

۴) چند بردار را به ما می‌دهند و از ما درباره جمع یا تفریق آن‌ها، زاویه بین دو بردار، ضرب داخلی و یا ضرب خارجی آن‌ها سؤالاتی را می‌پرسند.

۵) در بعضی از موارد از ما می‌خواهند که یکی از ویژگی‌های ضرب داخلی و یا ضرب خارجی بردارها را اثبات کنیم.

۶) یکی دیگر از تیپ سؤال‌های مهم این بخش، پیدا کردن تصویر یک بردار روی بردار دیگر است.

۷) به دست آوردن مساحت مثلث، مساحت متوازی‌الاضلاع و یا به دست آوردن حجم توازی‌السطح نیز از مهم‌ترین بخش‌های فصل سوم است که تقریباً هر ساله جزء کاندیدهای طرح سؤال هستند.

۸) و نهایتاً شرط هم‌صفحه بودن سه بردار هم جزء قسمت‌هایی است که احتمال طرح سؤال از آن بسیار زیاد است.

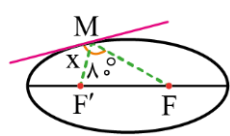
**و اما توصیه‌های پایانی...**

- قبل از تحویل پاسخنامه امتحانی، حتماً حتماً به بار دیگه جواب‌هایی که دادی رو چک کن تا به وقت خدای نکرده جایی اشتباه نکرده باشی.
- برای جواب دادن به سؤال‌ها به هیچ عنوان از روش‌های سریع و اصطلاحاً روش‌های تستی استفاده نکن و سعی کن پاسخ تشریحی رو به صورت کامل بنویسی (البته وقتی که می‌خواهی جوابی که به دست آوردی رو چک کنی که درسته یا نه! اگه راه بده می‌تونی از این روش‌ها استفاده کنی)
- سعی کن که هیچ سؤالی رو بدون جواب نذاری.

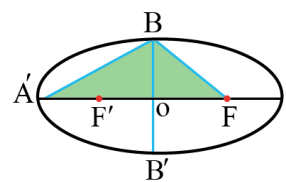


ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	<p>درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس مربعی هم مرتبه دلخواه باشند، در حالت کلی <math>AB=BA</math> است.</p> <p>ب) در حالتی که صفحه <math>p</math> بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع حاصل دایره خواهد بود.</p> <p>پ) اگر معادله سهمی به صورت <math>y^2 = -4ax</math> (<math>a &gt; 0</math>) باشد، دهانه سهمی رو به چپ است و خط هادی <math>x=a</math> است.</p> <p>ت) نقطه <math>A(0, -2, 0)</math> روی صفحه <math>xOz</math> قرار دارد.</p>	۱
۱/۲۵	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب، کامل کنید.</p> <p>الف) اگر همه اعضای ماتریس <math>3 \times 3</math> در عدد ۵ ضرب شود، دترمینان ماتریس ..... برابر می شود.</p> <p>ب) شعاع دایره <math>x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0</math> برابر ..... است.</p> <p>پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک ..... می شود.</p> <p>ت) در بیضی مقابل، اندازه زاویه <math>X</math> برابر ..... درجه است.</p> <p>ث) نمودار مربوط به معادله <math>y=0</math> در <math>\mathbb{R}^3</math> معادله ..... است.</p>	۲
۱/۲۵	<p>ماتریس <math>A = [a_{ij}]_{3 \times 3}</math> به صورت زیر تعریف شده است. حاصل <math>A + \Delta I</math> را به دست آورید.</p> $a_{ij} = \begin{cases} i + \Delta & ; i > j \\ i^2 + 2j & ; i = j \\ i - j & ; j > i \end{cases}$	۳
۱	<p>ثابت کنید اگر درایه های ستون اول ماتریس <math>3 \times 3</math> ضربی از درایه های ستون سوم آن باشند، دترمینان ماتریس برابر صفر خواهد بود.</p>	۴
۱/۲۵	<p>ابتدا نشان دهید دستگاه مقابل جواب دارد. سپس با کمک ماتریس وارون آن را حل کنید.</p> $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$	۵
۱/۲۵	<p>دو نقطه <math>A</math> و <math>B</math> و خط <math>d</math> که شامل هیچکدام از نقاط نیست، مفروض اند. نقاطی را پیدا کنید که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله بوده و از خط <math>d</math> به اندازه ۳ سانتی متر فاصله داشته باشند. در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.</p>	۶
۱/۲۵	<p>معادله دایره ای را بنویسید که نقطه <math>O(0, 1)</math> مرکز آن باشد و روی خط <math>x+y=2</math> وترى به طول <math>2\sqrt{2}</math> جدا کند.</p>	۷
۱/۲۵	<p>قطر کوچک بیضی مقابل ۸ و مساحت مثلث <math>A'BF</math> برابر <math>4+4\sqrt{5}</math> است، خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.</p>	۸



$$a_{ij} = \begin{cases} i + \Delta & ; i > j \\ i^2 + 2j & ; i = j \\ i - j & ; j > i \end{cases}$$



ردیف	سوالات	نمره
۹	سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است: الف) مختصات رأس و کانون سهمی را پیدا کنید. ب) معادله خط هادی را بنویسید. پ) مختصات محل برخورد سهمی و محورهای مختصات را پیدا کنید. ت) سهمی را رسم کنید.	۲
۱۰	نشان دهید اگر نقطه $M$ بیرون بیضی قرار داشته باشد، مجموع فواصل $M$ از کانون‌های $F$ و $F'$ بزرگ‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است.	۱
۱۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $\begin{cases} x^2 \leq y \leq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.	۰.۷۵
۱۲	نشان دهید ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد.	۱
۱۳	بردارهای $\vec{a} = -j + k$ و $\vec{b} = (2, -1, 2)$ مفروض‌اند: الف) زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.	۲
۱۴	اگر $A = (-1, 2, 0)$ ، $B = (1, 0, -1)$ و $C = (0, -1, 1)$ سه رأس مثلث $ABC$ باشند، طول ارتفاع $AH$ را پیدا کنید.	۱/۵
۱۵	اگر $x + 2z - 2y = 10$ باشد، کم‌ترین مقدار عبارت $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$ را پیدا کنید.	۱/۲۵
۱۶	حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که با بردارهای $\vec{a} = (0, 2, 2)$ ، $\vec{b} = (1, 0, 2)$ و $\vec{c} = (2, 1, 0)$ ساخته می‌شود.	۱
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱	الف) ..... (ب) ..... (پ) ..... (ت) .....	۱
۲	الف) ..... (ب) ..... (پ) ..... (ت) ..... ث) .....	۱/۲۵
۳		۱/۲۵
۴		۱
۵		۱/۲۵
۶		۱/۲۵
۷		۱/۲۵
۸		۱/۲۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۹	(الف)  (ب)  (پ)  (ت)	۲
۱۰		۱
۱۱		۰/۷۵
۱۲		۱

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۳	(الف)	۲
	(ب)	
۱۴		۱/۵
۱۵		۱/۲۵
۱۶		۱
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱	پاسخ تشریحی: الف) نادرست (۰/۲۵)    ب) درست (۰/۲۵)    پ) درست (۰/۲۵)    ت) نادرست (۰/۲۵)	۱
۲	پاسخ تشریحی: الف) $5^3 = 125$ (۰/۲۵)    ب) ۴ (۰/۲۵)    پ) پاره خط (۰/۲۵)    ت) $50^\circ$ (۰/۲۵) ث) صفحه XOZ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۳	پاسخ تشریحی: $A = [a_{ij}]_{3 \times 3} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 8 & -1 \\ 8 & 8 & 15 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$ $\Delta I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A + \Delta I = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 7 & 13 & -1 \\ 8 & 8 & 20 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$	۱/۲۵
۴	پاسخ تشریحی: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ستون سوم است.}]{\substack{\text{شرط مسئله} \\ \text{ستون اول } k \text{ برابر}}} A = \begin{bmatrix} kc & b & c \\ kf & e & f \\ ki & h & i \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$ $ A  = kc \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - kf \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + ki \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad (۰/۵)$ $ei - hf \quad bi - hc \quad bf - ec$ $ A  = kcei - kchf - kfbi + kfhc + kibf - kiec = 0 \quad (۰/۲۵)$	۱
۵	پاسخ تشریحی: دستگاه جواب یکتا دارد $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b}{b'} = \frac{5}{-3}, \frac{c}{c'} = \frac{11}{9} \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow (۰/۲۵)$ $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow  A  = 2(-3) - 4(5) = -26 \neq 0 \quad (۰/۲۵)$ $A^{-1} = \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33+45 \\ 44-18 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$	۱/۲۵

ردیف	پاسخنامه	نمره
------	----------	------

۴ پاسخ تشریحی:

مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند عمود منصف پاره خط AB است، این خط را رسم می کنیم و آن را  $l$  می نامیم (۰/۲۵) مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر هستند دو خط  $d'$  و  $d''$  می باشند که موازی  $d$  هستند (۰/۲۵) محل برخورد دو خط  $d'$  و  $d''$  با خط  $l$  جواب مسئله است.

الف) اگر خط  $l$  دو خط  $d'$  و  $d''$  را قطع کند، مسئله دو جواب دارد. (۰/۲۵)

ب) اگر خط  $l$  بر یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  منطبق باشد مسئله بی شمار جواب دارد. (۰/۲۵)

پ) اگر خط  $l$  هیچ یک از دو خط  $d'$  و  $d''$  را قطع نکند مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)

«دو جواب» «جواب ندارد» «بی شمار جواب»

۷ پاسخ تشریحی:

مطابق شکل، از مرکز دایره بر خط عمود می کنیم:

$\begin{cases} OB = r \\ O(0,1) \end{cases}$   

$$OH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۰/۲۵)$$
  
 $x + y - 2 = 0 \quad AH = BH = \frac{1}{2} AB = \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$

حال در مثل قائم الزویه  $\triangle OHB$  مطابق قضیه فیثاغورس داریم:

$$OB^2 = BH^2 + OH^2 \Rightarrow OB^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (۰/۲۵)$$

معادله دایره:  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2} \quad (۰/۵)$

۸ پاسخ تشریحی:

$۲ \times \text{قطر کوچک بیضی} = ۸ \Rightarrow OB = ۴ \Rightarrow b = ۴ \quad (۰/۲۵)$   

$$S_{\triangle A'BF} = \frac{1}{2} \times (A'F) \times \frac{OB}{2} = 2(a+c)$$

می دانیم که مساحت مثلث  $A'BF$  برابر  $۴ + ۴\sqrt{5}$  است، پس:

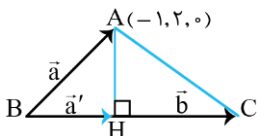
$$2(a+c) = 4 + 4\sqrt{5} = 2(2 + 2\sqrt{5}) \Rightarrow a+c = 2 + 2\sqrt{5} \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 16 = (a+c)(a-c) \Rightarrow (a-c) = \frac{16}{a+c} = \frac{16}{2(1+\sqrt{5})} = 2\sqrt{5} - 2 \quad (۰/۲۵)$$

ردیف	پاسخنامه	نمره
------	----------	------

	<p>در نتیجه:</p> $\begin{cases} a+c=2+2\sqrt{5} \\ a-c=2\sqrt{5}-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{5} \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (0/25)$	
۹	<p>پاسخ تشریحی: (الف)</p> $y^2 = 2x - 4y \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$ $\Rightarrow \begin{cases} S = (-2, -2) \quad (0/25) \\ a = \frac{1}{2} \quad (0/25) \\ F = \left(-\frac{3}{2}, -2\right) \quad (0/25) \end{cases}$ <p>(ب) خط هادی: <math>x = -\frac{5}{2} \quad (0/25)</math></p> <p>(پ)</p> $x = 0 \Rightarrow (y+2)^2 = 4 \Rightarrow y+2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \Rightarrow (0, -4) \quad (0/25) \\ y = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad (0/25) \end{cases}$ <p>(ت) رسم شکل: (0/5)</p>	
۱۰	<p>پاسخ تشریحی:</p> <p>از نقطه M به F و F' وصل می‌کنیم. اگر MF بیضی را در نقطه A قطع کند، داریم:</p> <p>(نامساوی مثلثی) <math>AF' &lt; AM + MF'</math> در مثلث MAF' (0/25)</p> <p>(رسم شکل 0/25)</p> <p>حال به طرفین نامساوی فوق AF را اضافه می‌کنیم:</p> $\underbrace{AF' + AF}_{2a} < \underbrace{AM + AF + MF'}_{MF} \xrightarrow{(0/25)} MF + MF' > 2a \quad (0/25)$ <p>قطر بزرگ بیضی</p>	
۱۱	<p>پاسخ تشریحی:</p> <p>رسم نمودار <math>y = x^2</math> (0/25)</p> <p>رسم خطوط <math>x = 1</math> و <math>x = -1</math> و <math>y = 2</math> (0/25):</p> <p>مشخص کردن ناحیه رنگی: (0/25)</p>	

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱۲	<p>پاسخ تشریحی:</p> $\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (۰/۵)$ $= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 \quad (۰/۲۵)$ $= (b_1, b_2, b_3)(a_1, a_2, a_3) = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (۰/۲۵)$	۱
۱۳	<p>پاسخ تشریحی:</p> $\begin{cases} \vec{a} = -j + k = (0, -1, 1) \Rightarrow  \vec{a}  = \sqrt{2} \quad (۰/۲۵) \\ \vec{b} = (2, -1, 2) \Rightarrow  \vec{b}  = \sqrt{6} = 3 \quad (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 1 + 2 = 3 \quad (۰/۲۵)$ <p>(الف)</p> $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } \xrightarrow{(۰/۲۵)} \cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (۰/۲۵)$ <p>(ب) بردار <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> بر هر دو بردار عمود است: (۰/۲۵)</p> <p>توجه: هر مضربی از <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> نیز قبول است.</p> $\vec{a} \times \vec{b} = (0, -1, 1) \times (2, -1, 2) = (-1, 2, 2) \quad (۰/۵)$	۲
۱۴	<p>پاسخ تشریحی:</p>  $\begin{cases} \vec{a} : \overline{BA} = (-2, 2, 1) \Rightarrow  \overline{BA}  = \sqrt{6} = 3 \Rightarrow  \vec{a}  = 3 \quad (۰/۲۵) \\ \vec{b} : \overline{BC} = (-1, -1, 2) \Rightarrow  \overline{BC}  = \sqrt{6} \Rightarrow  \vec{b}  = \sqrt{6} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$ <p>تصویر بردار <math>\vec{a}</math> روی بردار <math>\vec{b}</math>: <math>BH = \vec{a}'</math></p> $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \times \vec{b} = \frac{2 - 2 + 2}{6} (-1, -1, 2) = \frac{1}{3} (-1, -1, 2) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (۰/۲۵)$ $BH :  \vec{a}'  = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (۰/۲۵)$ $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 9 - \frac{6}{9} = \frac{75}{9} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{75}{9}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۵	<p>پاسخ تشریحی:</p> <p>فرض کنید: <math>\begin{cases} \vec{a} = (1, -2, 2) \\ \vec{b} = (x+1, y-1, z-2) \end{cases} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases}  \vec{a}  = 3 \\  \vec{b}  = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \end{cases} \quad (۰/۲۵)</math></p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = x + 1 - 2y + 2 + 2z - 4 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{x + 2z - 2y - 1}{1} = 9 \quad (۰/۲۵)$ <p>حال به کمک نامساوی کوشی - شوارتز، داریم:</p> $\underbrace{ \vec{a} \cdot \vec{b} }_{(۰/۲۵)} \leq  \vec{a}   \vec{b}  \Rightarrow 9 \leq 3 \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ $\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \geq 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 9$ <p>بنابراین کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است. (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵

ردیف	پاسخنامه	نمره
۴	<p>پاسخ تشریحی: روش اول:</p> $\vec{a} = (0, 2, 3) \quad \vec{a} \times \vec{b} = (0, 2, 3) \times (1, 0, 2) = (4, 3, -2) \quad (0/5)$ $\vec{b} = (1, 0, 2) \quad \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 1, 0) \times (4, 3, -2) = 8 + 3 + 0 = 11 \quad (0/25)$ $\vec{c} = (2, 1, 0)$ <p>حجم متوازی السطوح: <math>v =  \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})  =  11  = 11 \quad (0/25)</math></p> <p>روش دوم: اگر دانش آموز به روش زیر حل کند، نمره کامل تعلق گیرد:</p> $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-3) + 0(-2) = 8 + 3 + 0 = 11 \quad (0/25)$ $v =  \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})  =  11  = 11 \quad (0/25)$	۱
	موفق باشید.	۲

**نکته:**

• هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی را که شامل تعدادی سطر و ستون باشد یک ماتریس می‌گوییم.  
 • هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌گوییم.  
 • در حالت کلی اگر ماتریس  $A$  دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد آن را به صورت  $A_{m \times n}$  نمایش می‌دهیم و می‌گوییم  $A$  ماتریسی از مرتبه  $m \times n$  است.  
 • برای هر درایه ماتریس دو اندیس تعریف می‌کنیم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن را مشخص می‌کند به عبارت دیگر  $a_{ij}$  یعنی درایه روی سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام.  
 • اگر ماتریس  $A$  را به صورت  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  نمایش دهیم در این صورت به  $a_{ij}$ ، درایه عمومی ماتریس  $A$  می‌گوییم که در آن  $1 \leq i \leq m$  و  $1 \leq j \leq n$  تغییر می‌کند.

**مثال:**

اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  ماتریس  $3 \times 4$  باشد به طوری که برای  $i = j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i + j$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i^2$ ، در این صورت ماتریس  $A$  را با درایه‌های مشخص کنید.  
 عبارت سؤال را به صورت مقابل خلاصه می‌کنیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & i > j \\ 7 & i = j \\ i^2 & i < j \end{cases}$$

• درایه‌های  $a_{11}$ ،  $a_{22}$  و  $a_{33}$  که در آن‌ها  $i = j$  است برابر 7 می‌باشند.

• درایه‌های  $a_{12}$ ،  $a_{13}$ ،  $a_{14}$ ،  $a_{23}$ ،  $a_{24}$  و  $a_{34}$  که در آن‌ها  $i < j$  است برابر  $i^2$  می‌باشند.

• درایه‌های  $a_{21}$ ،  $a_{31}$  و  $a_{32}$  که در آن‌ها  $i > j$  است برابر  $i + j$  می‌باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

**مثال:**

اگر ماتریس  $A$  به صورت  $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$  باشد آن را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 3-2 & 3-4 & 3-6 \\ 6-2 & 6-4 & 6-6 \\ 9-2 & 9-4 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

**مثال:**

ماتریس  $A$  به صورت  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  که  $a_{ij} = \begin{cases} i + j & i = j \\ j & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$  است. این ماتریس را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

• در درایه‌های  $a_{11}$ ،  $a_{22}$  و  $a_{33}$ ،  $i = j$  است.

• در درایه‌های  $a_{12}$ ،  $a_{13}$  و  $a_{23}$ ،  $i < j$  است.

• در درایه‌های  $a_{21}$ ،  $a_{31}$  و  $a_{32}$ ،  $i > j$  است.



• **ماتریس همانی:** اگر در یک ماتریس اسکلر تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ باشند آن را ماتریس همانی یا ماتریس واحد می‌نامیم و آن را با  $I$  نمایش می‌دهیم.

$$۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad ۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad ۱ = [۱]$$

**مثال:**

اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$  یک ماتریس همانی باشد حاصل  $m+r$  را بیابید.

$$\begin{cases} r=1 \\ m-1=0 \rightarrow m=1 \end{cases} \rightarrow m+r=1+1=2$$

**مثال:**

در ماتریس قطری  $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-1 & ۴ \end{bmatrix}$  مقدار  $m$  چقدر است؟

$$m-1=0 \rightarrow m=1$$

**تساوی بین دو ماتریس**

دو ماتریس هم‌مرتبه  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  با هم برابرند اگر و تنها اگر درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

**مثال:**

اگر دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} x-1 & ۸ \\ ۳ & z+1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$  مساوی باشند مقدار  $(x+y+z)$  را بیابید.

$$\begin{cases} x-2=8 \rightarrow x=10 \\ y+1=x-1 \rightarrow y=x-2 \xrightarrow{x=10} y=10-2=8 \\ z+1=4 \rightarrow z=3 \end{cases} \rightarrow x+y+z=10+8+3=21$$

**جمع و تفریق ماتریس‌ها:**

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است که درایه‌های دو ماتریس را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم.

**ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس:**

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس  $A$ ، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس  $A$  ضرب می‌کنیم.

**قرینه یک ماتریس**

اگر  $A$  یک ماتریس دلخواه باشد، قرینه ماتریس  $A$  از ضرب عدد  $(-1)$  در ماتریس  $A$  به دست می‌آید که آن را با  $(-A)$  نشان می‌دهیم.

**نکته:** برخی از خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس:

اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  ماتریس‌های هم‌مرتبه و  $r$  و  $s$  اعدادی حقیقی باشند، داریم:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$
- $r(A \pm B) = rA \pm rB$
- $(r \pm s)A = rA \pm sA$
- $rA = rB$ ,  $r \neq 0 \rightarrow A = B$
- $A = B \rightarrow rA = rB$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری باشد با محاسبه  $m$  و  $n$ ، ماتریس  $A + I$  را بیابید. ( $I$  ماتریس همانی مرتبه دو است)

$$\begin{cases} m+1=0 \rightarrow m=-1 \\ 2n+4=0 \rightarrow n=-2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**مثال:**

دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید، آیا جمع دو ماتریس  $A$  و  $B$  تعریف می‌شود؟ چرا؟

خیر - زیرا دو ماتریس  $A$  و  $B$  هم‌مرتبه نیستند.

**مثال:**

اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$  تعریف شده باشد، ماتریس  $2A - 3I$  را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

**ضرب ماتریس‌ها**

در حالت کلی دو ماتریس  $A$  و  $B$  زمانی ضرب‌پذیر هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد به عبارت دیگر:

$$A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

برابر

• ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:

اگر  $A$  ماتریس سطری و  $B$  ماتریس ستونی باشد برای پیدا کردن حاصل  $A \times B$ ، کافی است هر درایه ماتریس  $A$  را در درایه نظیرش در ماتریس  $B$  ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم، ببینید:

$$A \times B = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

• ضرب ماتریس در ماتریس:

ماتریس  $A_{m \times p}$  و  $B_{p \times n}$ ، مفروضند. حاصل  $A \times B$ ، ماتریسی مانند  $C_{m \times n}$  است که هر درایه آن از ضرب یک سطر ماتریس  $A$  در یک ستون ماتریس  $B$  به دست می‌آید به عبارت دیگر:

$$C = \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{زام} \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} = [\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A] \times \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{زام} \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix}$$

**مثال:**

مقادیر  $x$  و  $y$  را از معادله زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$  باید با ماتریس  $\begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$  برابر باشد:

$$\begin{cases} 2x = 4 \rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \xrightarrow{x=2} 6 = y - 2 \rightarrow y = 8 \end{cases}$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  باشد مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریسی قطری باشد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

حال برای اینکه ماتریس حاصل، ماتریسی قطری باشد، باید:

$$\begin{cases} -8+2a = 0 \rightarrow a = 4 \\ b-3 = 0 \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

**مثال:**

دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد حاصل  $AB$  را محاسبه کنید.

می‌دانیم که  $A$  یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} m-2 = 0 \rightarrow m = 2 \\ n+1 = 0 \rightarrow n = -1 \end{cases}$$

حال حاصل  $AB$  برابر است با:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

**خواص عمل ضرب ماتریس‌ها**

(۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$AB \neq BA$$

(۲) اگر  $A$  ماتریس مربعی مرتبه  $n$  و  $I$  ماتریس واحد (همانی) مرتبه  $n$  باشد آن‌گاه ماتریس  $I$  عضو خنثی برای عمل ضرب است به عبارت دیگر:

$$AI = IA = A$$

(۳) ضرب ماتریس  $A$  در  $(B \pm C)$ ، خاصیت توزیع‌پذیری یا پخش را دارد:

$$A(B \pm C) = AB \pm AC$$

(۴) ضرب ماتریس  $A$  در  $(BC)$ ، خاصیت شرکت‌پذیری را دارد:

$$A(BC) = (AB)C$$

(۵) در حالت کلی قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست به عبارت دیگر اگر برای ماتریس‌های متمایز  $A$ ،  $B$  و  $C$  داشته باشیم،  $AB = AC$ ، آن‌گاه لزوماً  $B = C$  نیست.

**مثال:**

معادله ماتریسی  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$  را حل کنید.

ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  را محاسبه کرده و سپس آن را در ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0 \\ -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 - 21 \\ 3 \times 1 - 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 21 \\ 3x - 21 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که حاصل به دست آمده باید برابر صفر باشد، پس:

$$3x - 21 = 0 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$$

**توان در ماتریس**

اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد توان‌های صحیح و نامنفی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $A^0 = I$
- $A^1 = A$
- $A^2 = A \times A$
- $A^3 = A \times A^2 = A^2 \times A$
- $A^4 = A \times A^3 = A^3 \times A = A^2 \times A^2$
- $\vdots$
- $A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A = \dots$

• ویژگی‌های توان در ماتریس  
اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

- $A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{(m+n)}$
- $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$

مثال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشد ماتریس  $A^2$  را به دست آورید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد ماتریس  $A^7$  را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I$$

$$A^7 = (A^2)^3 \times A = (-2I)^3 \times A = -8 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

اگر ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$  باشند، مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که داشته باشیم:  $A^2 - B = \bar{O}$  (  $\bar{O}$  ماتریس صفر است )

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B = \bar{O} \rightarrow A^2 = B \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases}$$

مثال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، مقادیر  $m$  و  $n$  را طوری بیابید که رابطه  $A^2 = mA + nI_2$  برقرار باشد. ( $I_2$  ماتریس همانی است.)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$mA + nI_2 = m \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که رابطه  $A^2 = mA + nI_2$  باید برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} n=8 \\ m=1 \end{cases}$$

دو ماتریس تعویض پذیر

می‌دانیم که در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد حال اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی باشند و  $AB = BA$  باشد در این صورت دو ماتریس  $A$  و  $B$  تعویض پذیرند. حال اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس تعویض پذیر باشند، در این صورت:

- $(A - B)^T = A^T - 2AB + B^T$
- $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$
- $(A - B)(A + B) = A^T - B^T$

**مثال:**

اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید:  $(A - B)^T = A^T - 2AB + B^T$   
 $(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \xrightarrow[\text{AB=BA}]{\text{تعویض پذیرند B, A}} A^T - 2AB + B^T$

**مثال:**

اگر  $A^T = A$  باشد در این صورت ثابت کنید:  $(A + I)^T = I + 2A$   
 می‌دانیم که  $A$  و  $I$  تعویض پذیرند، بنابراین:  
 $(A + I)^T = (A + I)(A + I) = A^T + AI + IA + I^T = A^T + 2A + I \xrightarrow[\text{می‌دانیم}]{A^T=A} A + 2A + I = 3A + I$

**مثال:**

اگر ضرب ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  تعویض پذیر باشد حاصل  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix}$  را بیابید.  
 می‌دانیم که ضرب ماتریس‌های  $A$  و  $B$  تعویض پذیر است، یعنی:  $AB = BA$   
 $\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4x+3y & 3x+4y \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+6 & 4y-3 \\ 3x+8 & 3y-4 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{cases} 3x+8=5 \rightarrow x=-1 \\ 3y-4=2 \rightarrow y=2 \end{cases}$   
 حال حاصل خواسته شده برابر است با:  
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2+4-2=0$

**دترمینان:**

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی را نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. حال اگر  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه  $n$  باشد ( $1 \leq n \leq 3$ ) در این صورت دترمینان ماتریس  $A$  را با نماد  $\det(A) = |A|$  نمایش می‌دهیم و داریم:

- $A = [k]_{1 \times 1} \rightarrow |A| = k$
- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$
- $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

توجه: برای محاسبه دترمینان ماتریس  $3 \times 3$  در روش فوق، بسط را بر حسب هر سطر یا هر ستون دلخواه می‌توان انجام داد.

مثال:

دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$A = [-3] \rightarrow |A| = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1 \cdot 0) - 12 = -12$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{برحسب سطر اول}} |A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(15) - (-9) = 39$$

مثال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} |A| & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  باشد در این صورت حاصل  $|A|$  را بیابید.

$$|A| = 5|A| - 24 \rightarrow 4|A| = 24 \rightarrow |A| = 6$$

مثال:

اگر  $A = [2i - 3j]_{3 \times 2}$  و  $B_{2 \times 3} = \begin{cases} -1 & i \neq j \\ \cdot & i = j \end{cases}$  باشد دترمینان ماتریس  $AB$  را به دست آورید.

ابتدا ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & \cdot \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cdot & -1 & -1 \\ -1 & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & -1 \\ -1 & \cdot & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ \cdot & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

حال با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$|AB| = 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \cdot & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \cdot & -3 \end{vmatrix} = 4(6) - 1(-6) + 5(-6) = 0$$

مثال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  باشد دترمینان ماتریس  $BA$  را به دست آورید.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

با بسط برحسب سطر اول، داریم:

$$|BA| = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = 3(-10) - 1(-10) - 1(-20) = 0$$

مثال:

دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & \cdot & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد حاصل  $|A| + |B|$  را به دست آورید.

می‌دانیم که ماتریس  $A$ ، یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} m-2=0 \rightarrow m=2 \\ n+1=0 \rightarrow n=-1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} |B| = 2(-1) - 1(7) + 1(-2) = -11$$

در نتیجه:  $|A| + |B| = 2 - 11 = -9$

**نکته:**

(۱) دترمینان هر ماتریس قطری، بالامتثلی و پایین‌امتثلی با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی، برابر است.

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & y \\ \cdot & b & z \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ x & b & \cdot \\ y & z & c \end{vmatrix} = abc$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  باشد مقدار  $|A|$  برابر است با:

$$|A| = 2 \times (-3) \times 5 = -30$$

(۲) اگر دو ماتریس مربعی با هم برابر باشند، دترمینان آن‌ها هم با هم برابر است.

$$A = B \rightarrow |A| = |B|$$

(۳) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$|AB| = |BA| = |A||B|$$

(۴) اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد، داریم:

$$|A^m| = |A|^m$$

(۵) اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  و  $k$  عددی حقیقی باشد، داریم:

$$|kA| = k^n |A|$$

(۶) اگر  $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  باشد آن‌گاه:  $|A| = -abc$

(۷) اگر  $A$  ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

**مثال:**

اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  و  $|A| = 5$  باشد آن‌گاه حاصل  $|2A|$  را به دست آورید.  
می‌دانیم  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  است پس:

$$|2A| = (2)^3 |A| = 8 \times 5 = 40$$

**مثال:**

اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = 5$ ، در این صورت حاصل  $||A|A|$  را بیابید:

$$|A| = 5 \rightarrow \underbrace{|A|}_5 A = |5A| = (5)^3 |A| = 125 \times 5 = 625$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A^2|$  را به دست آورید:

می‌دانیم که برای محاسبه  $|A^2|$ ، می‌توان حاصل  $|A|^2$  را به دست آورد. از طرفی چون  $A$  ماتریس پایین مثلثی است، پس:

$$|A| = (-2) \times (-3) \times (-5) = -30 \rightarrow |A|^2 = (-30)^2 = 900$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$  یک ماتریس اسکالر باشد دترمینان ماتریس  $A$  را بیابید.

چون  $A$  ماتریسی اسکالر است پس:

$$\begin{cases} f = e = c = 0 \\ a = b = 2 \end{cases}$$

و دترمینان ماتریس  $A$  با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی برابر است، یعنی:

$$|A| = 2 \times a \times b = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $|A^3|$  را محاسبه کنید.

ابتدا دترمینان ماتریس  $A$  را با بسط بر حسب ستون اول به دست می‌آوریم (چرا ستون اول؟ چون صفر زیاد دارد خوب!)

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(4-3) - 0 + 0 = 2$$

می‌توانستی اینارو هم ننویسی

حال برای محاسبه  $|A^3|$  داریم:

$$|A^3| = |A|^3 = (2)^3 = 8$$

**مثال:**

اگر  $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$  باشد در این صورت حاصل  $|A^{-1}|$  را بیابید.

ابتدا دترمینان ماتریس  $2A$  را پیدا می‌کنیم:

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \xrightarrow{\substack{A \text{ ماتریسی } 2 \times 2 \\ |2A| = (2)^2 |A|}} |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \rightarrow |A| = 2$$

حال حاصل  $|A^{-1}|$  برابر است با:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $||A|A|$  را بیابید.

$$|A| = -(1 \times 2 \times (-1)) = 2$$

$$||A|A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = 2^4 = 16$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشند، حاصل  $|A| + |B^T|$  را بیابید.

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20$$

$$|B| = -6 \rightarrow |B^T| = 36$$

$$|A| + |B^T| = 56$$

**وارون ماتریس**

برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$ ، وارون ماتریس  $A$  (در صورت وجود) ماتریسی مانند  $B$  است به طوری که:

$$A \times B = B \times A = I$$

در این صورت ماتریس  $B$  را وارون ماتریس  $A$  می‌گوییم و آن را با  $A^{-1}$  نمایش می‌دهیم. حال اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد در این صورت وارون ماتریس  $A$  (یعنی

$A^{-1}$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**توجه:** شرط لازم و کافی برای اینکه  $A^{-1}$  وجود داشته باشد ( $A$  وارون‌پذیر باشد) این است که  $|A| \neq 0$  باشد.

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، وارون ماتریس  $A - 2I$  را بیابید. ( $I$  ماتریس همانی مرتبه دو است)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - 2I| = 2$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**مثال:**

اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  باشد حاصل عبارت  $(2A^{-1} - 3B^{-1})$  را بیابید.

$$|A| = 2 \cdot 0 - 6 = 14 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 2A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2 - (-15) = 17 \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 3B^{-1} = \frac{3}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (2A^{-1} - 3B^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{15}{17} & -\frac{6}{17} \end{bmatrix}$$

**مثال:**

مقدار  $m$  را طوری بیابید که ماتریس  $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد.

برای اینکه ماتریس  $A$  وارون پذیر نباشد باید  $|A| = 0$  باشد، یعنی:

$$|A| = 2m - 4 = 0 \rightarrow 2m = 4 \rightarrow m = 2$$

**ویژگی‌های وارون ماتریس:**

اگر  $A$  ماتریسی مربعی و وارون پذیر باشد، داریم:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**مثال:**

ماتریس  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  مفروض است، ماتریس  $A$  را به دست آورید.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-1}| = 6 - (-2) = 8$$

می‌دانیم که  $(A^{-1})^{-1} = A$  است پس باید وارون ماتریس  $A^{-1}$  را به دست بیاوریم:

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

**حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از ماتریس وارون**

در حالت کلی هر دستگاه دو معادله و دو مجهولی به صورت  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  را می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$  را ماتریس ضرایب،

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  را ماتریس مجهولات و  $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$  را ماتریس مقادیر معلوم می‌گوییم، ببینید:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_B \rightarrow AX = B$$

حال برای حل معادله ماتریسی  $AX = B$ ، (به شرطی که  $A$  ماتریسی وارون پذیر باشد  $(|A| \neq 0)$ )، با ضرب  $A^{-1}$  از سمت چپ در معادله  $AX = B$ ، می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX = B \xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1}B \rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I X = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

**مثال:**

 دستگاه را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.
 
$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = A^{-1}B \rightarrow X = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 + 40 \\ 2 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

**نکته:**

 یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند حال اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ، ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، داریم:

	دستگاه یک جواب یکتا دارد	$ A  \neq 0$	دو خط متقاطع هستند	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
	دستگاه هیچ جوابی ندارد.	$ A  = 0$	دو خط موازی هستند	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.	$ A  = 0$	دو خط بر هم منطبق هستند.	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

**مثال:**

 مقدار  $m$  را چنان بیابید که دستگاه جواب نداشته باشد.
 
$$\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$$

 می‌دانیم شرط اینکه دستگاه فوق جواب نداشته باشد این است که  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  باشد:

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \neq \frac{-3}{2}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \rightarrow m(m+4) - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{m+4} \neq -\frac{3}{2} \rightarrow m \neq -6$$

 بنابراین تنها  $m = 2$  قابل قبول است.

**مکان هندسی**

به مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد، مکان هندسی می‌گوییم.  
**مکان هندسی‌های مهم:**

	<p>مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.</p>
	<p>مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.</p>
	<p>مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصله ثابت r قرار داشته باشند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r است.</p>
	<p>مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت m قرار داشته باشند، دو خط موازی با خط d هستند که به فاصله m در دو طرف آن قرار گرفته‌اند.</p>

**مثال:**

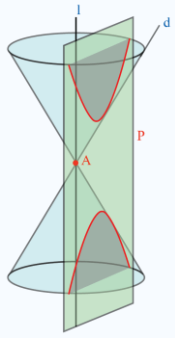
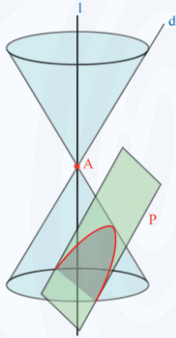
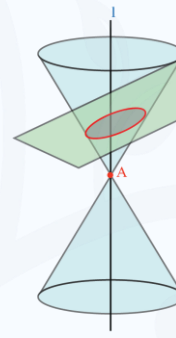
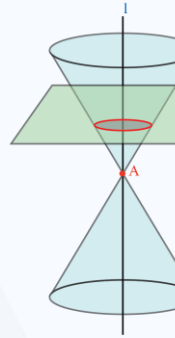
مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید.  
 الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. (نیمساز زوایای بین دو خط d و d')

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند. (خطی عمود بر d در نقطه A)

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند. (دو خط موازی با d و به فاصله r از آن)

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره C(O, r) در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند. (دایره‌ای به مرکز O و شعاع 2r)

مقاطع مخروطی

هذلولی	سه‌می	بیضی	دایره
صفحه P هر دو تکه بالایی و پائینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد.	صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند.	صفحه P بر محور L عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشند و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند.	صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند.
			
حالت‌های دیگر			
اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند و هر دو تکه بالایی و پائینی سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی دو خط متقاطع است.	اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک خط است.	اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.	اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.

نکته: اگر  $O(\alpha, \beta)$  مختصات مرکز یک دایره و  $r$  شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

مثال:

اگر معادله دایره به صورت  $(x + 1)^2 + y^2 = 4$  باشد مطلوبست:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره:

$$(x + 1)^2 + (y - 0)^2 = (2)^2 \rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ r = 2 \end{cases} \rightarrow O(-1, 0)$$

ب) مختصات تقاطع دایره با محور X ها و محور Y ها:

برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور X ها، باید در معادله دایره،  $y = 0$  قرار دهیم که در این صورت:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x + 1)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -2 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

در نتیجه نقاط  $(1, 0)$  و  $(-3, 0)$  محل تقاطع دایره با محور X ها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور Y ها، باید در معادله دایره،  $x = 0$  را قرار بدهیم:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x=0} 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط  $(0, \sqrt{3})$  و  $(0, -\sqrt{3})$ ، محل تقاطع دایره با محور  $y$  ها هستند.

**نکته:**

اگر  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  معادله گسترده (ضمنی) یک دایره باشد، داریم:

مختصات مرکز دایره:  $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$

شعاع دایره:  $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

**مثال:**

معادله گسترده دایره‌ای به صورت  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$  می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \rightarrow O(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}) \rightarrow O(3, -1)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (2)^2 - 4(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$

در مثال فوق، معادله دایره را به صورت استاندارد بنویسید:

$\begin{cases} O(3, -1) \\ r = 2 \end{cases} \rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \rightarrow (x - 3)^2 + (y - (-1))^2 = 4 \rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

**نکته:**

شرط دایره بودن یک رابطه ضمنی به فرم  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

• اگر  $a^2 + b^2 > 4c$  باشد، این رابطه مربوط به دایره‌ای به شعاع  $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$  و به مرکز  $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  است.

• اگر  $a^2 + b^2 = 4c$  باشد، این رابطه مربوط به یک نقطه به مختصات  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  است.

• اگر  $a^2 + b^2 < 4c$  باشد، این رابطه هیچ نقطه‌ای را در صفحه مشخص نمی‌کند.

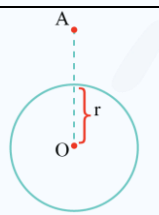
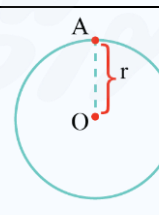
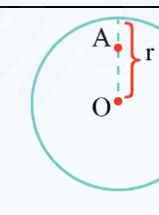
**مثال:**

حدود  $a$  را طوری به دست آورید که  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$  معادله یک دایره باشد.

$a^2 + b^2 > 4c \rightarrow 16 + 36 > 4a \rightarrow a < 13$

**وضعیت نقطه با دایره**

برای مشخص کردن وضعیت نقطه‌ای مانند  $A$  با دایره، ابتدا فاصله مرکز دایره را از نقطه  $A$  پیدا می‌کنیم و سپس به کمک جدول زیر وضعیت آن را با دایره تعیین می‌کنیم:

		
نقطه $A$ بیرون دایره است	نقطه $A$ روی دایره است	نقطه $A$ درون دایره است
$OA > r$	$OA = r$	$OA < r$

یادآوری: فاصله دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  از هم برابر است با:

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

**مثال:**

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(2, 3)$  بوده و  $M(1, 1)$  یک نقطه از آن باشد. فاصله  $OM$ ، همان شعاع دایره است، پس:

$$R = OM = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

**مثال:**

وضعیت نقطه  $A(1, -2)$  نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  را تعیین کنید. مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} O(1, -1) \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$$

حال فاصله نقطه  $A$  را از مرکز دایره به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{(1-1)^2 + (-1+2)^2} = 1$$

چون  $OA < r$  است پس نقطه درون دایره قرار دارد.

**اوضاع نسبی خط و دایره:**

برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم ( $OH$ ). حال با توجه به اندازه  $OH$  و اندازه شعاع دایره، داریم:

خط $L$ با دایره متقاطع است.	خط $L$ بر دایره مماس است.	خط $L$ دایره را قطع نمی‌کند.
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$

**یادآوری:**

- خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.
- فاصله نقطه  $A(x, y)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**مثال:**

وضعیت خط  $x + y = 1$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$  مشخص نمایید. ابتدا مختصات مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \rightarrow O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) \rightarrow O(-1, -1)$$

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله  $x + y - 1 = 0$  به دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|(1 \times -1) + (1 \times -1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow OH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sim 2.1$$

شعاع دایره را به دست آورده و آن را با اندازه  $OH$  مقایسه می‌کنیم:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - (-4)} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sim 1.7$$

چون  $\sqrt{3} > \frac{3\sqrt{2}}{2}$  است پس  $OH > r$  است در نتیجه خط  $x + y = 1$  دایره را قطع نمی‌کند.

**مثال:**

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(1, -1)$  و بر خط  $3x - 4y + 3 = 0$  مماس باشد.

فاصله مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است:

$$d = \frac{|3(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\begin{cases} O(1, -1) \\ r = 2 \end{cases} \rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

**مثال:**

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x + 3y = -5$  بر آن مماس باشد.

محل تقاطع خطوط داده شده، همان مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow O(2, -1)$$

از طرفی فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره با شعاع دایره برابر است:

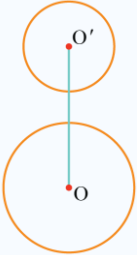
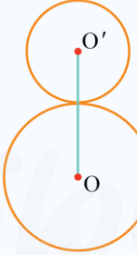



$$r = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

**اوضاع نسبی دو دایره:**

دو دایره  $C(O, r)$  و  $C'(O', r')$  را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المركزین) برابر  $d$  باشد، داریم:

				
$d > r + r'$	$d = r + r'$	$ r - r'  < d < r + r'$	$d =  r - r' $	$d <  r - r' $
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل

• توجه شود که اگر  $d = 0$  باشد دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.

• برای تشخیص وضعیت دو دایره  $C(O, r)$  و  $C'(O', r')$ ؛ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم.

(۲) سپس طول خط‌المركزین دو دایره  $d = |OO'|$  را نیز به دست می‌آوریم.

(۳) در نهایت  $(r + r')$  و  $|r - r'|$  را نیز محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه  $d = |OO'|$  مقایسه می‌کنیم.

**مثال:**

وضعیت دو دایره  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  و  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  را نسبت به هم مشخص کنید.  
ابتدا مرکز و شعاع هر دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} O(1,0) \\ r=1 \end{cases}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} O'(0,1) \\ r'=1 \end{cases}$$

حال فاصله دو مرکز را به دست آورده و آن را با  $r+r'$  و  $|r-r'|$  مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} |OO'| = \sqrt{2} \\ r+r' = 2 \rightarrow |r-r'| < OO' < r+r' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع‌اند} \\ |r-r'| = 0 \end{cases}$$

**مثال:**

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0,1)$  باشد و با دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$  مماس داخل باشد.  
ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$  را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} O'(4, -2) \\ r' = 2 \end{cases}$$

حال فاصله مرکز دو دایره را نیز به دست می‌آوریم:

$$OO' = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

می‌دانیم که دو دایره مماس داخل هستند، پس:  $|r-r'| = OO'$

$$|r-2| = 5 \rightarrow \begin{cases} r-2 = 5 \rightarrow r = 7 \\ r-2 = -5 \rightarrow r = -3 \text{ غ قق} \end{cases}$$

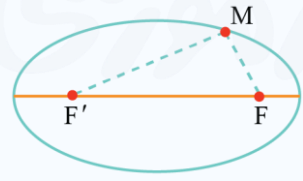
بنابراین معادله دایره موردنظر برابر است با:

$$\begin{cases} O(0,1) \\ r = 7 \end{cases} \rightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 49 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 49$$

**نکته:**

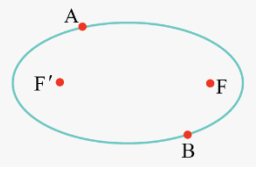
بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  (و  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی هستند)، مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت برابر  $2a$  است.

$$MF + MF' = 2a$$

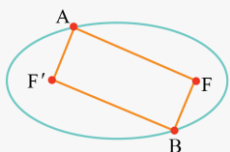


**مثال:**

دو نقطه  $A$  و  $B$  مطابق شکل روی بیضی و نقاط  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی‌اند. اگر  $AF' = BF$  باشد ثابت کنید که دو پاره خط  $AF$  و  $BF'$  موازی‌اند.



پاسخ: نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم:



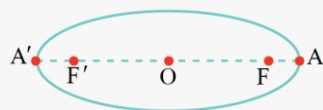
نقطه A و B روی بیضی قرار دارند پس بنا به تعریف بیضی:

$$\begin{cases} AF + AF' = 2a \\ BF + BF' = 2a \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض مسئله}]{AF' = BF} AF = BF'$$

بنابراین چهارضلعی  $AFBF'$  متوازی‌الاضلاع است و می‌دانیم که در هر متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند، پس:  $AF \parallel BF'$

**مثال:**

در بیضی روبه‌رو نقاط A و  $A'$  دو سر قطر بزرگ و نقاط F و  $F'$  کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید  $A'F' = AF$



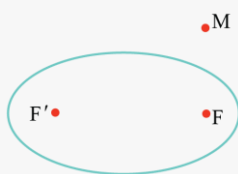
حل: نقطه A و  $A'$  روی بیضی قرار دارند و بنا به تعریف بیضی داریم:

$$\begin{cases} A'F' + A'F = 2a \\ AF' + AF = 2a \end{cases}$$

$$\rightarrow A'F' + A'F = AF' + AF \rightarrow A'F' + (A'F + FF') = AF + (AF + FF') \rightarrow AF = A'F'$$

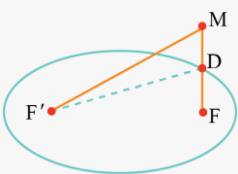
**مثال:**

اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه M از کانون‌های F و  $F'$  بزرگ‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است.



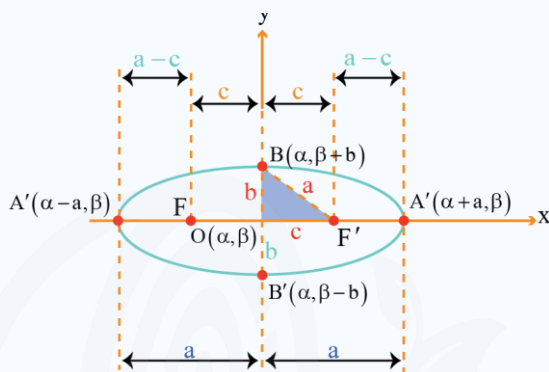
پاسخ: از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد و بنا به تعریف بیضی، داریم:  $DF + DF' = 2a$

حال بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث  $MDF'$  داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF} \underbrace{DF + MD}_{MF} + MF' > \underbrace{DF + DF'}_{2a} \rightarrow MF + MF' > 2a$$

نکته:



- $\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{قطر بزرگ (قطر کانونی)} = AA' = 2a \\ \text{قطر کوچک} = BB' = 2b \\ \text{فاصله کانونی} = FF' = 2c \end{cases}$
- $BF' = BF = B'F = B'F' = a$
- $a^2 = b^2 + c^2$  (با توجه به مثلث قائم‌الزاویه  $OBF'$ )
- فاصله یک کانون تا دورترین رأس  $= a + c$
- فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس  $= a - c$

• خروج از مرکز بیضی:

(۱) مقدار  $\frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف  $e$  نمایش می‌دهیم.

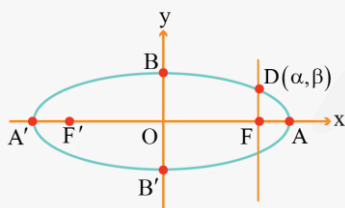
(۲) همواره خروج از مرکز بیضی بین  $0$  و  $1$  است ( $0 \leq e < 1$ )

(۳) هرچه نسبت  $e = \frac{c}{a}$  بزرگ‌تر و به  $1$  نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

(۴) هرچه نسبت  $e = \frac{c}{a}$  کوچک‌تر و به  $0$  نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.

مثال:

مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای  $x$  و  $y$  منطبق هستند و فاصله  $F$  از هر دو نقطه  $O$  و  $A$  برابر  $4$  است. اگر خطی که در نقطه  $F$  بر  $AA'$  عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه  $D$  قطع کرده باشد مختصات نقطه  $D$  را به دست آورید.



پاسخ: می‌دانیم  $FO = FA = 4$  است. پس مختصات نقطه  $F$  به صورت  $F(4,0)$  است و چون نقاط  $F$  و  $D$  طول برابری دارند پس مختصات نقطه  $D$  به صورت  $D(4, \beta)$  است.

از طرفی نقطه  $D$  روی بیضی است پس:

$$DF + DF' = 2a \quad (1)$$

$$OA = a \rightarrow OF + FA = a \rightarrow 4 + 4 = a \rightarrow a = 8 \xrightarrow{(1)} DF + DF' = 16$$

به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث  $DFD'$  داریم:

$$\begin{cases} DF'^2 = FF'^2 + DF^2 \\ DF + DF' = 16 \rightarrow DF' = 16 - DF \end{cases} \rightarrow (16 - DF)^2 = FF'^2 + DF^2$$

می‌دانیم  $OF' = OF = 4$  است، پس:  $FF' = 8$  در نتیجه:

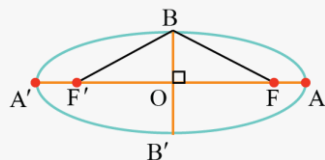
$$(16 - DF)^2 = 64 + DF^2 \rightarrow 256 - 32DF + DF^2 = 64 + DF^2 \rightarrow 32DF = 192$$

$$\rightarrow DF = 6 \rightarrow \beta = 6$$

$$D(4, 6)$$

پس مختصات نقطه D برابر است با:

**مثال:**



در شکل مقابل، اگر  $OA = a$ ،  $OB = b$  و  $OF = c$  باشد ثابت کنید:  $a^2 = b^2 + c^2$

پاسخ: نقطه B روی عمودمنصف پاره خط  $FF'$  قرار دارد در نتیجه:  $BF = BF'$  (۱)

از طرفی فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

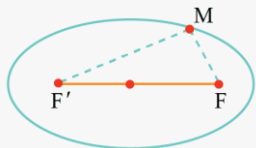
$$BF + BF' = 2a \xrightarrow{(1)} BF = BF' = a$$

حال بنا به رابطه فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

$$OF^2 + OB^2 = BF^2 \rightarrow c^2 + b^2 = a^2$$

**مثال:**

نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



الف) نشان دهید مثلث  $MFF'$  قائم‌الزاویه است.

ب) طول MF را بیابید (F و F' کانون‌های بیضی و  $MF < MF'$ )

پاسخ: الف)

$$\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4$$

در مثلث  $MFF'$ ، میانه وارد بر یک ضلع نصف ضلع روبرو است ( $MO = \frac{1}{2}FF' = 4$ ) در نتیجه مثلث  $MFF'$  قائم‌الزاویه است.

ب)

$$MF + MF' = 2a = 10 \rightarrow MF' = 10 - MF$$

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 16 \rightarrow MF = 5 - \sqrt{7}$$

**مثال:**

اگر در یک بیضی طول  $AA'$  (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز آن  $\frac{3}{4}$  باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به‌دست آورید.

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4} \quad a=8 \rightarrow c=6$$

فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون:  $AF = a - c = 2$

**مثال:**

در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است.

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید:

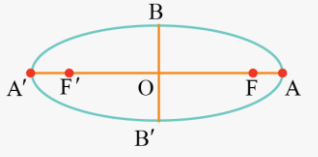
$$\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4 \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

ب) مختصات کانون‌ها  $(F', F)$ ، مختصات دو سر قطر بزرگ  $(A', A)$  و دو سر قطر کوچک  $(B', B)$  را به‌دست آورید.

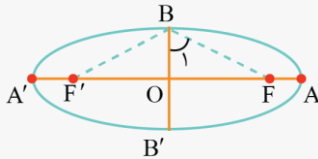
$$\begin{cases} F(4,0) \\ F'(-4,0) \end{cases} \quad \begin{cases} A(5,0) \\ A'(-5,0) \end{cases} \quad \begin{cases} B(0,3) \\ B'(0,-3) \end{cases}$$

مثال:

اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه  $\widehat{FBF'}$  چند درجه است؟



پاسخ:



$$a = 2b \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \rightarrow c = \sqrt{3}b$$

$$\tan B_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \rightarrow B_1 = 60^\circ$$

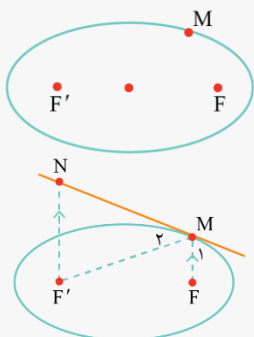
$$\widehat{FBF'} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

نکته:

اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند.

مثال:

در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی را موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید:  $NF' = MF'$



پاسخ: مجموع  $MF + MF'$  کم‌ترین مقدار است و بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر:  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$  (۱)

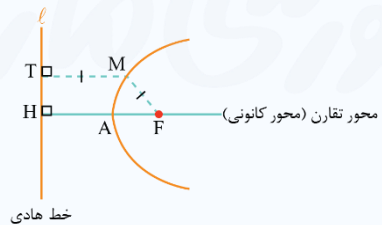
از طرفی  $NF' \parallel MF$  و  $d$  مورب است در نتیجه:  $\widehat{N} = \widehat{M}_1$  (۲)

$$\xrightarrow{(1), (2)} \widehat{N} = \widehat{M}_2 \rightarrow \triangle MNF' \rightarrow MF' = NF'$$

سهمی

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

$$\begin{cases} F = \text{کانون سهمی} \\ A = \text{رأس سهمی} \\ AF = \text{فاصله کانونی} = a, (a > 0) \end{cases}$$



- طبق تعریف سهمی، داریم:  $MT = MF$
- فاصله کانون سهمی از خط هادی برابر است با:  $FH = 2a$
- فاصله رأس سهمی از کانون، با فاصله رأس سهمی تا خط هادی، برابر است.  $AH = AF = a$

**معادله استاندارد (متعارف) سهمی**

در یک سهمی، اگر نقطه  $A(\alpha, \beta)$  رأس سهمی و فاصله رأس سهمی تا کانون سهمی برابر  $a$  باشد، داریم:

سهمی افقی		
رو به چپ	رو به راست	
$(y - \beta)^2 = -4a(x - \alpha)$	$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$	معادله سهمی
$x = \alpha + a$	$x = \alpha - a$	معادله خط هادی
$F(\alpha - a, \beta)$	$F(\alpha + a, \beta)$	مختصات کانون

سهمی قائم		
رو به پایین	رو به بالا	
$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta)$	$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$	معادله سهمی
$y = \beta + a$	$y = \beta - a$	معادله خط هادی
$F(\alpha, \beta - a)$	$F(\alpha, \beta + a)$	مختصات کانون

**توجه:** در معادله سهمی افقی،  $y$  وجود دارد ولی در معادله سهمی قائم،  $x$  وجود دارد.

**استاندارد کردن معادله گسترده سهمی**

اگر معادله سهمی به صورت  $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$  یا  $Ay^2 + By + Cx + D = 0$  باشد برای استاندارد کردن این معادلات، داریم:

- ابتدا با تقسیم کردن دو طرف معادله بر  $A$ ، ضریب  $x^2$  یا  $y^2$  را از بین می‌بریم.
- عدد ثابت را به همراه متغیر غیرهم‌جنس به طرف دیگر معادله منتقل کرده و معادله را به صورت  $x^2 + ax = -by - c$  یا  $y^2 + ay = -bx - c$  تبدیل می‌کنیم.
- طرف اول معادله را به صورت مربع کامل نوشته و عدد  $\frac{a^2}{4}$  را به طرف دیگر تساوی اضافه می‌کنیم.
- از ضریب متغیر درجه یک در طرف دوم تساوی فاکتور می‌گیریم.

**مثال:**

معادله یک سهمی به صورت  $y^2 - 6y + 16x + 25 = 0$  داده شده است آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید.

$$y^2 - 6y = -16x - 25$$

$$y^2 - 6y + 9 = -16x - 25 + 9 \rightarrow (y-3)^2 = -16x - 16$$

$$\rightarrow (y-3)^2 = -16(x+1)$$

**مثال:**

معادله سهمی را بنویسید که رأس آن  $A(1, 2)$  و کانون آن  $F(1, -2)$  باشد و سپس معادله خط هادی آن را بیابید. با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، سهمی رو به پایین بوده و  $a = 4$  است. در نتیجه:

معادله سهمی :  $(x-1)^2 = -16(y-2)$

معادله خط هادی :  $y = 6$

**مثال:**

معادله سهمی را بنویسید که رأس آن  $A(2, 3)$  بوده و معادله خط هادی آن  $x = 3$  باشد. با توجه به جایگاه رأس سهمی و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ است. در این سهمی  $a = 1$  بوده و معادله آن برابر است با:

$$(y-3)^2 = -4(x-2)$$

• در این سؤال، مختصات کانون سهمی را به دست آورید:

$$F = (\alpha - a, \beta) = (2 - 1, 3) = (1, 3)$$

• در این سؤال، مختصات محل برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید.

$$(y-3)^2 = -4(x-2) \xrightarrow{y=0} x = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{محل برخورد با محور طولها} = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

**مثال:**

سهمی  $y^2 = 4x - 4$  مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع 3 واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^2 = 4(x-1) \rightarrow \begin{cases} A(1, 0) \\ a = 1 \\ F(2, 0) \end{cases}$$

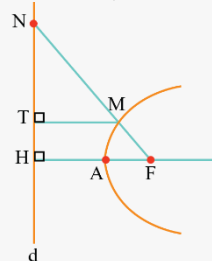
$$(x-2)^2 + y^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \rightarrow x = \pm 3 \xrightarrow{x \geq 1} x = 3$$

مختصات نقاط برخورد :

$$\begin{cases} M(3, 2\sqrt{2}) \\ M'(3, -2\sqrt{2}) \end{cases}$$

**مثال:**

در شکل روبه‌رو سهمی با رأس  $A$  و کانون  $F$  و خط هادی  $d$  رسم شده است. از کانون  $F$  به نقطه دلخواه  $M$  روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط  $d$  را



$$\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH} \text{ ثابت کنید. عمود کرده‌ایم. ثابت کنید}$$

روش اول:

بنابه تعریف سهمی  $MF = MT$  است پس مثلث  $MFT$  متساوی‌الساقین است:  $\hat{M}TF = \hat{T}FM$  (۱)

از طرفی بنابه خطوط موازی  $FH \parallel MT$  و مورب  $FT$  نتیجه می‌شود:  $\hat{M}TF = \hat{T}FH$  (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که  $TF$  نیمساز است، حال بنابه قضیه نیمساز در مثلث  $FHN$  داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH} \times 2 \rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

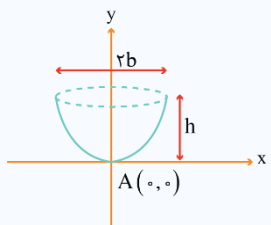
روش دوم:

می‌دانیم  $FH \parallel MT$  است لذا با توجه به قضیه تالس در مثلث  $NHF$ ، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{NM}{MF} &= \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} &= \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{FH=rFA} \frac{NF}{rFA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times r} \frac{NF}{FA} = \frac{rNT}{TH}$$

**نکته:**

اگر قطر دهانه یک دیش مخبراتی برابر  $2b$  و عمق (گودی) آن برابر  $h$  باشد فاصله کانونی آن برابر است با:



$$\text{فاصله کانونی} = \frac{b^2}{4h}$$

**مثال:**

در یک دیش مخبراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر  $60$  واحد و گودی (عمق)  $9$  واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

$$a = \frac{b^2}{4h}, \begin{cases} 2b = 60 \rightarrow b = 30 \\ h = 9 \end{cases}$$

$$a = \frac{(30)^2}{4 \times 9} = 25$$

**نکته:**

(۱) دو بردار مساوی (همسنگ): دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را مساوی (همسنگ) گوییم هرگاه هم‌اندازه و هم‌جهت باشند.

(۲) طول هر برداری مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  در  $R^3$  برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

(۳) جمع و تفاضل دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  برابر است با:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

(۴) اگر  $A = (x_1, y_1, z_1)$  و  $B = (x_2, y_2, z_2)$  دو نقطه در فضا باشند:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned}$$

(۵) اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  برداری در فضا باشد، بردار قرینه آن برابر است با:

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

(۶) برای هر عدد حقیقی  $r$ ، حاصل ضرب  $r$  در بردار  $\vec{a}$  برابر است با:

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

(۷) خواص جمع بردارها:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
- $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
- $(rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$

•  $\vec{b} = r\vec{a} \rightarrow |\vec{b}| = |r||\vec{a}|$  (قدر مطلق r است)

۸) بردارهای یکه محورهای مختصات:

$$\begin{cases} \vec{i} = (1, 0, 0) \rightarrow \text{بردار یکه در جهت محور طولها} \\ \vec{j} = (0, 1, 0) \rightarrow \text{بردار یکه در جهت محور عرضها} \\ \vec{k} = (0, 0, 1) \rightarrow \text{بردار یکه در جهت محور ارتفاعها} \end{cases}$$

۹) هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  را می‌توان به صورت ترکیبی از بردارهای یکه  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  بیان کرد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

**مثال:**

طول بردار  $\vec{a} = (0, -3, 4)$  را به دست آورید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

**مثال:**

اگر  $\vec{a} = (1, 2, -1)$  و  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  باشد طول بردار  $2\vec{a} - \vec{b}$  را به دست آورید.

$$2\vec{a} - \vec{b} = (2, 2, -1)$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

**مثال:**

نقاط  $A(3, 1, 2)$  و  $B(3, -2, 2)$  در  $R^3$  مفروض‌اند.  
الف) طول پاره خط AB را به دست آورید.  
ب) معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

حل: الف)

$$AB = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3$$

ب)

$$\begin{cases} x = 3 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

**مثال:**

اگر  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = (3, 1, -1)$  و  $r = 2$  باشد، بردار  $r\vec{b} - \vec{a}$  را به دست آورید.

$$\vec{a} = (3, 2, -1)$$

$$r\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a} = (6, 2, -2) - (3, 2, -1) = (3, 0, -1)$$

و طول بردار  $2\vec{b} - \vec{a}$  را اگر بخواهیم:

$$|2\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{9 + 0 + 1} = \sqrt{10}$$

**ضرب داخلی**

اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار در  $R^3$  باشند در این صورت ضرب داخلی  $\vec{a}$  در  $\vec{b}$  را با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

• چند رابطه مهم:

۱) اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار و  $\theta$  زاویه بین آنها باشد در این صورت، داریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی و هم‌جهت باشند، داریم:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$
- اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی و غیرهم‌جهت باشند، داریم:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$
- اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند، داریم:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (۲)$$

نامساوی کوشی‌شوارتز:

**توجه:** در اینجا منظور از  $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ، قدرمطلق مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  است.

اثباتش هم ببین:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ||\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta|$$

می‌دانیم که  $|\cos \theta| \leq 1$  است پس:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

**مثال:**

بردارهای  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را در نظر بگیرید. زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 + 0 = 3 \\ |\vec{a}| = 3 \\ |\vec{b}| = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = 45^\circ$$

**مثال:**

مقدار  $m$  را چنان بیابید که دو بردار  $\vec{a} = (2, m, -1)$  و  $\vec{b} = (m+1, 3, 2)$  بر هم عمود باشند.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow 2(m+1) + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 0$$

**خواص ضرب داخلی**

- ضرب داخلی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  خاصیت جابه‌جایی دارد.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$
- ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$
- امکان حذف در ضرب داخلی بردارها برقرار نیست به عبارت دیگر:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

۶) برای بردارهای  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  داریم:

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{cases}$$

۷) اتحادها:

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}$$

**مثال:**

اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بردارهایی باشند به ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، مقدار عددی عبارت  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  را به دست آورید.

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{0}|^2 \rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -7$$

**تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر بردار  $\vec{b}$**

بردار تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{a}' = r\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

**مثال:**

تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  را بر امتداد بردار  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + 2 \times 0 = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

**مثال:**

اگر  $\vec{a} = (1, -3, 4)$  و  $\vec{b} = (3, -4, 2)$  و  $\vec{c} = (-1, 1, 4)$  باشند، آن‌گاه تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید.

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6)$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49} (2, -3, 6)$$

**مثال:**

سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  و  $\vec{c} = (0, 2, 1)$  را در نظر بگیرید:

الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر با  $\theta$  باشد،  $\cos \theta$  را بیابید.  
ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر  $\vec{b} - \vec{c}$  را به دست آورید.

حل الف)

$$\begin{cases} \vec{a} = (2, 3, -1) \\ \vec{b} = (1, 0, 1) \end{cases} \rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

حل ب)

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (1, -2, 0)$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = -\frac{4}{5} (1, -2, 0)$$

**ضرب خارجی**

اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند، ضرب خارجی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

• چند رابطه مهم:

۱) اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار غیرصفر و  $\theta$  زاویه بین آنها باشد اندازه بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  برابر است با:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

• اگر دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی باشند، داریم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

• اگر دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند، داریم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

۲) مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ساخته می‌شود برابر است با:  $|\vec{a} \times \vec{b}|$

۳) مساحت مثلثی که توسط دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ساخته می‌شود برابر است با:  $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

۴) اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار غیرصفر باشند آن‌گاه رابطه مقابل (اتحاد لاگرانژ) برقرار است:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}|)^2$$

**مثال:**

دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض‌اند به طوری که  $|\vec{a}| = 6$  و  $|\vec{b}| = 4$  و زاویه بین آن‌ها  $30^\circ$  درجه است مقدار عبارت  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  را محاسبه کنید.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ = 6 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

**مثال:**

بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض‌اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$  و  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  را محاسبه کنید.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \rightarrow 72 = 3 \times 26 \times \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{72}{78} \rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3 \times 26 \times \left(\pm \frac{5}{13}\right) = \pm 30$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 \rightarrow (72)^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (3 \times 26)^2$$

$$\rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (3 \times 26)^2 - (72)^2 = 900 \rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm 30$$

ثابت کنید: دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی هستند اگر و فقط اگر  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{0}| \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0$$

می‌دانیم که  $|\vec{a}| \neq 0$  و  $|\vec{b}| \neq 0$  است پس:

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

**مثال:**

اگر طول بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به ترتیب ۴ و ۶ و  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$  باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{12}{4 \times 6} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

روش اول:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (12)^2 = (4 \times 6)^2$$

$$\rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

**مثال:**

مساحت متوازی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که توسط دو بردار  $\vec{a} = (3, 2, 1)$  و  $\vec{b} = (2, 0, 1)$  به‌وجود می‌آید.

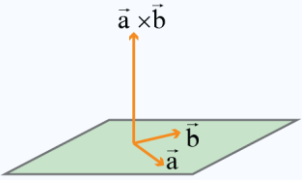
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k} = (2, -1, -4)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

**خواص ضرب خارجی**

۱) ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برداری است که بر هر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  عمود است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار، بر صفحه شامل آن دو بردار نیز عمود است. به عبارت دیگر:



$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \end{cases}$$

۲) برای بردارهای  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  داریم:

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \end{cases}$$

$$r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r\vec{b}$$

۳) اگر  $r$  عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

۴) برای سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  داریم:

$$\begin{cases} \vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} \pm \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \pm (\vec{b} \times \vec{c}) \end{cases}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (5)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (6)$$

۷) امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار نیست به عبارت دیگر:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

**مثال:**

اگر  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  بردارهای واحد در  $R^3$  باشند، حاصل  $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$  را به‌دست آورید.

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot (\vec{i}) = |\vec{i}|^2 = 1$$

**مثال:**

بردارهای  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را در نظر بگیرید. برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  پیدا کنید.

می‌دانیم که بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$ ، بر هر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  (و همچنین بر صفحه شامل آن‌ها) عمود است، پس:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (2, 2, -1)$$

**مثال:**

سه بردار  $\vec{a} = (2, 3, 1)$  و  $\vec{b} = (-1, 1, 0)$  و  $\vec{c} = (2, 1, -2)$  مفروض اند. برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  را به دست آورید.  
 برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$

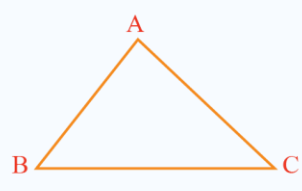
$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 4, 1)$$

$$\vec{c} = (2, 1, -2)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k} = (-9, 4, -7)$$

**نکته:**

اگر مختصات سه رأس از مثلثی را در اختیار داشته باشیم برای به دست آوردن مساحت آن مثلث به کمک ضرب خارجی، داریم:



$$S_{\triangle ABC} = \begin{cases} \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ \frac{1}{2} |\vec{BA} \times \vec{BC}| \\ \frac{1}{2} |\vec{CA} \times \vec{CB}| \end{cases}$$

**مثال:**

اگر  $A = (-1, 2, 0)$  و  $B = (1, 0, -1)$  و  $C = (0, -1, 1)$  سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

$$\vec{AB} = B - A = (2, -2, -1)$$

$$\vec{AC} = C - A = (1, -3, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k} = (-5, -3, -4)$$

می‌دانیم که مساحت مثلث مورد نظر از رابطه  $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$  به دست می‌آید، پس:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

**ضرب مختلط**

اگر  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  و  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  و  $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$  سه بردار در فضا باشند آن‌گاه ضرب مختلط آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

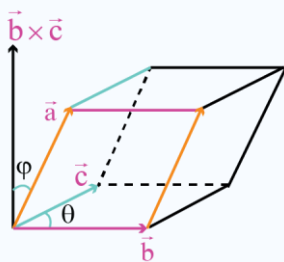
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

**ویژگی ضرب مختلط:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

**حجم متوازی السطوح**

حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار غیر صفر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  ساخته می‌شود برابر است با:



$$V = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| \quad ( | | \text{ علامت قدر مطلق است} )$$

**مثال:**

سه بردار  $\vec{a} = (2, 3, 1)$ ،  $\vec{b} = (-1, 1, 0)$  و  $\vec{c} = (2, 1, -2)$  مفروض‌اند. حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می‌شود را به دست آورید.

$$V = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = \left| 2(-2) - 3(2) + 1(-3) \right| = \left| -4 - 6 - 3 \right| = \left| -13 \right| = 13$$

**نکته:**

اگر سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه قرار داشته باشند، آن‌گاه حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط این سه بردار برابر صفر است به عبارت دیگر اگر سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه قرار داشته باشند آن‌گاه داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

عکس این نکته نیز درست است، یعنی اگر  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$  باشد آن‌گاه سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه قرار دارند.

**مثال:**

مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که سه بردار  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ،  $\vec{b} = (0, m, -1)$  و  $\vec{c} = (1, -2, 3)$  در یک صفحه باشند.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

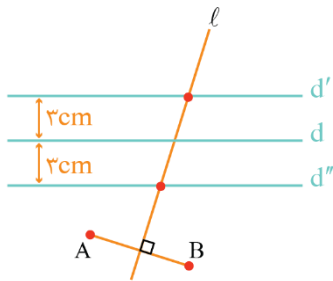
$$\rightarrow 2(3m - 2) - (-1)(0 + 1) + 3(0 - m) = 0 \rightarrow 6m - 4 + 1 - 3m = 0 \rightarrow 3m = 3 \rightarrow m = 1$$

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $A$ و $B$ دو ماتریس $3 \times 3$ دلخواه باشند آن گاه عبارت $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ همواره برقرار است. ب) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. پ) رابطه $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ معادله یک دایره است. ت) برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر $A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار $a$ برابر ..... است. ب) اگر صفحه $P$ به محور $l$ عمود نباشد و با مولد $d$ نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک ..... است. پ) در یک سهمی هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از ..... می گذرد. ت) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} $ ، در این صورت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ..... است.	۱
۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشد در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.	۱
۴	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد: الف) حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید. ب) دترمینان ماتریس $B$ را به دست آورید.	۱/۵
۵	دستگاه $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱
۶	دستگاه $\begin{cases} (m-2)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیر $m$ دارای جواب منحصر به فرد است؟	۱
۷	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7$ را به دست آورید.	۱
۸	دو نقطه $A$ و $B$ و خط $d$ که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض است. نقطه ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و از خط $d$ به فاصله ۳ سانتی متر باشد.	۱/۵
۹	معادله دایره ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ و تری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.	۱
۱۰	در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	اگر خروج از مرکز یک بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک آن ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.	۱/۲۵

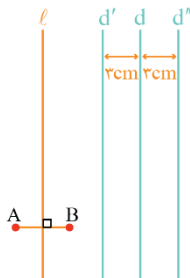
ردیف	سوالات	نمره
۱۲	<p>قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.</p>	۰/۷۵
۱۳	<p>سهمی به معادله <math>y^2 - 2y + 8x + 9 = 0</math> را در نظر بگیرید:                      الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.                      ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.                      پ) نمودار سهمی را رسم کنید.</p>	۱/۷۵
۱۴	<p>به سوالات زیر پاسخ دهید.                      الف) معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه <math>A = (2, 3, 4)</math> بگذرد و با صفحه <math>xoy</math> موازی باشد.                      ب) معادلات <math>\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}</math> مربوط به کدام محور است؟                      پ) در فضای <math>R^3</math> نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه <math>B = (-4, 6, -2)</math> مفروض اند. مختصات وسط AB را بیابید.</p>	۰/۷۵
۱۵	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (-2, 0, 2)</math> و <math>\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}</math> را در نظر بگیرید.                      الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.                      ب) تصویر قائم بردار <math>\vec{a} + \vec{b}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> به دست آورید.</p>	۱/۵
۱۶	<p>برای دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math>، ثابت کنید <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بر هم عمودند اگر و فقط اگر <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0</math></p>	۱
۱۷	<p>بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> به طولهای <math> \vec{a}  = 3</math> و <math> \vec{b}  = 26</math> و اندازه ضرب خارجی <math> \vec{a} \times \vec{b}  = 72</math> مفروض اند. اگر زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> کمتر از <math>90^\circ</math> باشد مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.</p>	۱/۲۵
۱۸	<p>حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار <math>\vec{a} = (1, 0, -1)</math> و <math>\vec{b} = (0, 2, 2)</math> و <math>\vec{c} = (2, -3, 0)</math> تولید می شود را به دست آورید.</p>	۱
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) - (اگه A و B تعویض پذیر باشن عبارت داده شده همواره برقراره). ب) درست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)	۱
	$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 16 - 40 = -20 < 0$	
	$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$	
۲	الف) ۶ - (۰/۲۵) ب) بیضی (۰/۲۵) پ) کانون سهمی (۰/۲۵) ت) صفر (۰/۲۵)	۱
	$ A  = 0 \rightarrow -4a - 24 = 0 \rightarrow -4a = 24 \rightarrow a = -6$	
۳	در نتیجه:	۱
	$\begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} & (۰/۲۵) \\ 2x + y = 5 \xrightarrow{x = \frac{3}{2}} 3 + y = 5 \rightarrow y = 2 & (۰/۲۵) \\ z = -2 & (۰/۲۵) \end{cases}$	
	$x + y + z = \frac{3}{2} + 2 - 2 = \frac{3}{2} \quad (۰/۲۵)$	
۴	الف) (۱ نمره) ب) (۰/۵ نمره)	۱/۵
	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$	
	$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 1 & 10 & 11 \\ 19 & 5 & 42 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$	
	$ B  = \overbrace{2(15) - 1(-9) + 0(-6)}^{(۰/۲۵)} = 39 \quad (۰/۲۵)$	

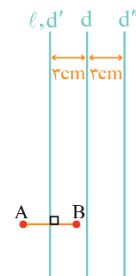
ردیف	پاسخنامه	نمره
۵	$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow  A  = 6 + 4 = 10 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B \rightarrow X = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p>	
۶	$\begin{vmatrix} m-3 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{(۰/۲۵)} (m-3)(m+1) - 12 \neq 0 \xrightarrow{(۰/۲۵)} \begin{cases} m \neq 5 \\ m \neq -3 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> <p style="text-align: right;">در نتیجه: <math>m \in \mathbb{R} - \{5, -3\}</math> (۰/۲۵)</p>	
۷	$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $A^Y = \underbrace{(A^T)^3}_{(۰/۲۵)} \times \underbrace{A}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{(-2I)^3}_{(۰/۲۵)} \times A = -8 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p>	
۸	<p>۱/۵ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند عمود منصف پاره خط AB است این خط را رسم می کنیم و آن را <math>\ell</math> می نامیم (۰/۲۵)</p> <p>مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر هستند دو خط <math>d'</math> و <math>d''</math> می باشند که موازی d هستند (۰/۲۵)</p> <p>محل برخورد دو خط <math>d'</math> و <math>d''</math> با خط <math>\ell</math> جواب مسئله است.</p> <p>الف) اگر خط <math>\ell</math> دو خط <math>d'</math> و <math>d''</math> را قطع کند، مسئله دو جواب دارد. (۰/۲۵)</p> <p>ب) اگر خط <math>\ell</math> بر یکی از دو خط <math>d'</math> یا <math>d''</math> منطبق باشد مسئله بی شمار جواب دارد. (۰/۲۵)</p> <p>پ) اگر خط <math>\ell</math> هیچ یک از دو خط <math>d'</math> و <math>d''</math> را قطع نکند مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)</p>	



«دو جواب»



«جواب ندارد»



«بی شمار جواب»

رسم حداقل یک مورد شکل برای مسئله: (۰/۲۵)

ردیف	پاسخنامه	نمره
۹	<p>از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم و می‌دانیم که عمود OH، وتر AB را نصف می‌کند.</p> $OH = \frac{ x+y-2 }{\sqrt{1+1}} = \frac{ 0+1-2 }{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25)$ $OA^2 = OH^2 + AH^2 \xrightarrow{(0/25)} OA^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = r^2 \quad (0/25)$ $(x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2} \quad (0/25)$	۱
۱۰	<p>مرکز دایره برابر است با <math>O(1,1)</math></p> <p>شیب خط عمود بر دایره در نقطه <math>A(2,3)</math> برابر است با:</p> $m_{AO} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \quad (0/25)$ <p>شیب خط مماس بر دایره در نقطه <math>A(2,3)</math>، قرینه و عکس شیب خط عمود است، یعنی:</p> $m' = \frac{-1}{m_{OA}} = -\frac{1}{2} \quad (0/25)$ <p>معادله خط مماس بر دایره برابر است با:</p> $y-3 = -\frac{1}{2}(x-2) \quad (0/25)$	۰/۲۵
۱۱	$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}a \quad (0/25)$ $b = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 16 + \frac{9}{25}a^2 \rightarrow a = 10 \quad (0/25)$ <p>می‌دانیم که <math>c = \frac{3}{5}a</math> است، پس: <math>c = 6</math> (۰/۲۵)</p> <p>در نتیجه:</p> $\begin{cases} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 20 \\ \text{فاصله کانونی} = 2c = 12 \end{cases} \quad (0/25)$	۱/۲۵
۱۲	$OM = OA = a \quad (0/25)$ $\Delta OMF: OF^2 + MF^2 = OM^2 \rightarrow \underbrace{c^2 + MF^2}_{(0/25)} = a^2 \rightarrow MF = b \quad (0/25)$	۰/۲۵

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱۳	<p>الف) (۰/۲۵)</p> $(y-1)^2 = -\lambda(x+1) \rightarrow A(-1, 1) \quad (۰/۲۵)$ <p>دهانه سهمی به سمت چپ و <math>a = 2</math></p> <p>خط هادی: <math>x = 1</math> (۰/۲۵)</p> <p>کانون سهمی: <math>F(-3, 1)</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) سهمی با محور <math>y</math> ها برخوردی ندارد و مختصات نقطه برخورد سهمی با محور <math>x</math> ها برابر است با: <math>(-\frac{9}{\lambda}, 0)</math> (۰/۲۵)</p> <p>پ) برای رسم سهمی از نقاط کمکی <math>B = (-3, 5)</math> و <math>B' = (-3, -3)</math> استفاده می‌کنیم: (۰/۲۵)</p> <p>رسم شکل: (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
۱۴	<p>الف) <math>z = 4</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) محور <math>y</math> ها (۰/۲۵)</p> <p>پ) <math>\begin{cases} A = (2, 0, 0) \\ B = (-4, 6, -3) \end{cases} \rightarrow \text{مختصات وسط } AB = (-1, 3, -\frac{3}{2})</math> (۰/۲۵)</p>	۰/۲۵
۱۵	<p>الف) (۰/۲۵)</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 0, 2) \cdot (0, 2, 2) = 4 \quad (۰/۲۵)$ $ \vec{a}  =  \vec{b}  = 2\sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$ $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ \quad (۰/۲۵)$ $\vec{a} + \vec{b} = (-2, 0, 2) + (0, 2, 2) = (-2, 2, 4) \quad (۰/۲۵)$ <p>ب)</p> $(\vec{a} + \vec{b})' = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{12}{8} (0, 2, 2) = (0, 3, 3) \quad (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۶	<p>الف) <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \leftrightarrow \underbrace{ \vec{a} }_{\neq 0} \underbrace{ \vec{b} }_{\neq 0} \cos \theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 0 \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}</math> (۰/۲۵)</p>	۱

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱۷	<p>روش اول:</p> $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta \xrightarrow{(\cdot/25)} \sin \theta = \frac{72}{3 \times 26} = \frac{12}{13} \quad (\cdot/25) \rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13} \quad (\cdot/25)$ $\xrightarrow{\theta < 90^\circ} \cos \theta = \frac{5}{13} \quad (\cdot/25) \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta = 30 \quad (\cdot/25)$ <p>روش دوم:</p> $ \vec{a} \times \vec{b} ^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =  \vec{a} ^2  \vec{b} ^2 \xrightarrow{(\cdot/25)} 72^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 3^2 \times 26^2 \quad (\cdot/25)$ $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 900 \xrightarrow{(\cdot/25)} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm 30 \quad (\cdot/25) \xrightarrow{\theta < 90^\circ} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 30 \quad (\cdot/25)$	۱/۲۵
۱۸	<p>۱</p> $(\vec{b} \times \vec{c}) = (6, 4, -4) \quad (\cdot/25)$ $v = \underbrace{ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) }_{(\cdot/25)} = \underbrace{ (1, 0, -1) \cdot (6, 4, -4) }_{(\cdot/25)} = 10 \quad (\cdot/25)$ <p>اگر دانش آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:</p> $v = \underbrace{ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) }_{(\cdot/25)} = \underbrace{\left  \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \right }_{(\cdot/25)} = 10 \quad (\cdot/5)$	۱
۱۹	موفق باشید.	۲۰